Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ   No. 25ο   Date 10/1/2017

50ο

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1) $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $f: U \to \mathbb{R}$ μερ. διαφ. στο τοπικό ακρότατο $\bar{x} \in U \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

2) $\bar{x} \in U$ με $\nabla f(\bar{x}) = 0$, $f \in C^2(U)$. Τότε:

α) $Hf(\bar{x})$ θετ. ορισμένος $\Rightarrow \bar{x}$ γνήσιο τοπ. ελάχιστο

β) $Hf(\bar{x})$ αρν. ορισμένος $\Rightarrow \bar{x}$ γνήσιο τοπ. μέγιστο

γ) $Hf(\bar{x})$ μη ορισμένος $\Rightarrow \bar{x}$ σαγματικό σημείο

Κλασσικά παραδείγματα

α) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

παρατήρηση: Πολλές φορές το πού και τι είδους είναι τα ακρότατα φαίνεται αμέσως: πχ εδώ $f(0,0) = 0 < f(x,y) = x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \nabla f(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow$ το μοναδικό υποψήφιο σημείο ακρότατο είναι το $(0,0)$.

[Το οποίο από παρατήρηση είναι γνήσιο ολικό ελάχιστο

Πράγματι $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ που είναι θετικά ορισμένος

β) $g(x,y) = -(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \nabla g(x,y) = -2(x,y)$

$\Rightarrow Hg(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ αρν. ορισμένος

$\Rightarrow$ το μοναδικό τοπικό ακρότατο είναι στο $(0,0)$ και είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

γ) $h(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\nabla h(x,y) = (2x, -2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$Hh(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ μη ορισμένος $\Rightarrow (0,0)$ σαγματικό σημείο

Προσοχή!!!

Τα (1) και (2) δεν δίνουν πάντα κάποια απάντηση.
(αυτό δεν σημαίνει ότι δεν δίνουν απάντηση)

$f_1(x,y) = x^2 + y^4$, $f_2(x,y) = x^2$

$f_3(x,y) = x^2 + y^3$, $f_4(x,y) = x^2 - y^4$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \nabla f_1(x,y) = (2x, 4y^3)$

$\nabla f_2(x,y) = (2x, 0)$

$\nabla f_3(x,y) = (2x, 3y^2)$

$\nabla f_4(x,y) = (2x, -4y^2)$

$\Rightarrow$ υποψήφια σημεία τοπ. ακροτάτων

$f_1 : (0,0)$

$f_2 : (0,y)$, $y \in \mathbb{R}$

$f_3 : (0,0)$

$f_4 : (0,0)$

$Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ θετικά ημιορισμένα

$Hf_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf_2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Hf_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow Hf_3(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Hf_4(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf_4(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Το ικανό κριτήριο δεν δίνει καμία απάντηση και ορθώς αφού f_1 είναι στο $(0,0)$ γνήσιο ολικό ελάχιστο
f_3 δεν έχει ακρότατα στο $(0,0)$, αφού $f(0,\epsilon) = \epsilon^2$, $f(0,-\epsilon) = -\epsilon^2$
f_4 έχει στο $(0,0)$ σαγματικό σημείο ($\Rightarrow$ ούτε ελάχ. ούτε μεγ.)
Τέλος, το f_2 έχει σε κάθε σημείο $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ ολικό ελάχιστο αλλά όχι γνήσιο.

No. Date

ΑΣΚΗΣΗ 84

Δίνονται $k \in \mathbb{N}$ τυχαία σταθερά $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$

Δείξτε ότι η $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} \|\bar{x} - \bar{x}_i\|^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

έχει ολικό ελάχιστο στο $\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i$

Λύση

$\bar{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$

$\bar{x}_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)})$

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x^{(j)} - x_i^{(j)})^2 \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{k} 2(x^{(1)} - x_i^{(1)}, \dots, x^{(n)} - x_i^{(n)})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} 2(\bar{x} - \bar{x}_i)$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 2\left(k\bar{x} - \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i\right) = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i$$

$$Hf(\bar{x}) = D\Big(2k\bar{x} - \underbrace{2k \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i}_{=\bar{a}}\Big) = D\bar{g}(\bar{x}) \quad \text{για } g(\bar{x}) = 2k\bar{x} - \bar{a} = \begin{pmatrix} 2kx_1 - a_1 \\ \vdots \\ 2kx_n - a_n \end{pmatrix}$$

$$D\bar{g}(\bar{x}) = J\bar{g}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(2kx_1 - a_1) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}(2kx_1 - a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(2kx_n - a_n) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}(2kx_n - a_n) \end{pmatrix} =$$

$$= 2kI = 2k \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ θετικά ορισμένος} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \text{ ολικό ελάχιστο.}$$

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θ.Π.Σ.

Γενική μορφή συν. σε οποιοσδήποτε διαστάσεις. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά

$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$, $U : V \to \mathbb{R}^m$, $\bar{F} \in C^k(U \times V, \mathbb{R}^m)$, $k \geq 1$

και $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in U \times V$ με $\bar{F}(x_0, y_0) = \bar{0}$

και έστω ότι $\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} (\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ είναι αντιστρέψιμος

$[\bar{x} \in U,\ \bar{y} \in V,\ \bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)\ \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^m$
$= \bar{F}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)]$

Τότε $\exists \delta, \epsilon > 0$ $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \subset U$

υπάρχει μοναδικό $\leftarrow$ $\exists!\ \bar{y}(\bar{x}) \in B(\bar{y}_0, \epsilon) \subset V$

$\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})) = \bar{0}$ και $\bar{g} : B(\bar{x}_0, \delta) \Rightarrow B(\bar{x}_0, \epsilon)$

είναι C^k και $D\bar{g}(\bar{x}) = -\left(\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))\right)^{-1} \dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$

Θ.Π.Σ. (απλούστερη μορφή για $n = m = 1$)

Έστω $F : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ να είναι C^k, $k \geq 1$ και

$(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$ με $F(x_0, y_0)$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Τότε $\exists \delta, \epsilon > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$

$\exists!\ g(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subset (c,d)$: $F(x, g(\bar{x})) = 0$

και $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$

με $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(\bar{x})) \neq 0$ και $g'(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

π.χ.

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Το ΘΠΣ.